

Artículo de Investigación

## Enseñanza de permutaciones a estudiantes de educación superior mediante el uso de un juego clásico

### Teaching permutations to higher education students through the use of a classic game

 TERÁN-BATISTA, Xavier

*Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña, San Juan, República Dominicana*

 DE OLEO-COMAS, Adrián

*Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña, San Juan, República Dominicana*

Autor correspondal: [xavier.teran@isfodosu.edu.do](mailto:xavier.teran@isfodosu.edu.do)

**Recibido:** 11-02-2021; **Aceptado:** 10-04-2021; **En línea:** 14-04-2021

 DOI: <https://doi.org/10.25214/27114406.1062>

**Cómo citar este artículo:**

Terán-Batista, X. & De-Oleo-Comas, A. (2021). Enseñanza de permutaciones a estudiantes de educación superior mediante el uso de un juego clásico. *IPSA Scientia, revista científica multidisciplinaria*, 6(2), 10-25. <https://doi.org/10.25214/27114406.1062>

**Resumen** - Los juegos son herramientas útiles para el aprendizaje, mantienen a los estudiantes motivados mientras cumplen con el objetivo de ayudar a desarrollar habilidades cognitivas. En matemáticas a nivel superior, se observa que existe resistencia de algunos docentes en utilizar estrategias de aprendizaje basado en juegos (GBL, por sus siglas en inglés) para enseñar contenidos abstractos que es posible visualizar en entornos digitales, lo que favorece su uso en tiempos de pandemia. El profesorado debe adaptarse a las nuevas generaciones, que aprenden y disfrutan trabajando sobre situaciones cotidianas, y una forma de hacerlo es utilizando el juego como recurso para enseñar. En esta investigación, se propone el uso de un juego clásico conocido por Taken o Juego del 15 como una herramienta de motivación para la enseñanza de algunas propiedades importantes del grupo simétrico  $S_{15}$ , se establece una relación biunívoca entre el juego y las permutaciones con el fin de elaborar explicaciones a fenómenos algebraicos que ocurren al jugar y se construye un instrumento que evalúa los fundamentos conceptuales que se identifican en el juego, para garantizar que la actividad ayuda al desarrollo de las competencias en los alumnos. En consecuencia, se evidencia que el Juego del 15 constituye una estrategia didáctica innovadora, que favorece la enseñanza de permutaciones a estudiantes del nivel superior para temas de álgebra moderna.

**Palabras clave:** Álgebra, enseñanza, estrategias educativas, juego educativo, motivación.

**Abstract** – Games are useful tools for learning, they keep students motivated while meeting the goal of helping develop cognitive skills. In mathematics at the higher level, it is observed that there is resistance from some teachers to use game-based learning strategies (GBL) to teach abstract content that can be viewed in digital environments, which favors its use in times of pandemic. Teachers must adapt to the new generations, who learn and enjoy working on everyday situations, and one way to do this is by using games as a teaching resource. In this research, the use of a classic game known as Taken or Game of 15 is proposed as a motivational tool for teaching some important

properties of the symmetric group  $S_{15}$ , a one-to-one relationship is established between the game and the permutations in order to elaborate explanations to algebraic phenomena that occur when playing and an instrument is built that evaluates the conceptual foundations that are identified in the game, to guarantee that the activity helps the development of skills in students. Consequently, it is evident that the Game of 15 constitutes an innovative didactic strategy, which favors the teaching of permutations to students of the higher level for topics of modern algebra.

**Keywords:** Algebra, teaching, educational strategies, educational game, motivation.

---

## Introducción

Si bien en los últimos años se han dado avances significativos en el desarrollo de estrategias de aprendizaje basada en juegos, y la web ha traído consigo un número considerable de plataformas construidas para que los docentes elaboren actividades enfocadas en el uso de esta técnica, podría mejorar el contexto con la creación de nuevas herramientas que permitan el desarrollo de un mejor aprendizaje en los estudiantes a través del uso de actividades lúdicas en el área de matemáticas, por la dificultad que presenta para ellos entender contenidos de álgebra abstracta que favorecen el desarrollo del pensamiento lógico, crítico y creativo.

Al momento de enseñar matemática en la mayoría de los salones de clase a nivel superior, siempre ha surgido la pregunta ¿Para qué estudio esto? ¿Me sirve de algo lo que aprendí hoy? Este tipo de preguntas sacan a luz la necesidad de que lo que se aprenda en el aula pueda ser extrapolado a otros entornos que no necesariamente involucran el día a día y que de igual manera deben ser conocidos para el estudiante. Pero claro, contextualizar los contenidos se convierte en una tarea difícil para los docentes cuando los temas que imparten son en su mayoría abstractos, como son las permutaciones. Una alternativa para solucionar este problema, es crear esos contextos de aprendizaje por medio de juegos donde se observen características que puedan ser explicadas desde las matemáticas. (Muñiz-Rodríguez et al., 2014)

Esta investigación toma lugar en el año 2019, tras notar que los docentes tienen ante sí el reto de desarrollar estrategias pedagógicas utilizando herramientas tecnológicas o juegos. Esta situación además supone una limitante en el presente año 2021, donde a consecuencia de la pandemia por COVID-19, se han impuesto toques de queda desde el pasado 2020, que inhabilitan a los estudiantes de acceder a los espacios físicos de aprendizaje. Lo que hizo necesario que las clases sean adaptadas a un nuevo entorno y por lo tanto las actividades a realizar sean congruentes con el mismo, además de mantener el objetivo de lograr que los estudiantes se sientan motivados en la adquisición de conocimientos para facilitar la construcción de los aprendizajes en el área específica (Viñals Blanco & Cuenca Amigo, 2016), (De-Vincenzi, Marcano, & Macri, 2020).

De esta manera surge la necesidad de que se desarrollen nuevas estrategias de enseñanza y aprendizaje aplicables a entornos virtuales. A razón de esta circunstancia, se propone el uso del Juego del 15 o *Taken* como una herramienta de motivación para profundizar en los aprendizajes de las permutaciones a estudiantes del nivel superior que se encuentren tomando clases de álgebra moderna, ya sea de manera presencial o virtual, con la integración de un sitio web (<https://juegodel15.netlify.app/>) desarrollado con herramientas tecnológicas como *HTML*, *JavaScript* y *CSS* para adaptar el juego a las necesidades pedagógicas actuales, que requieren del

uso de herramientas tecnológicas efectivas para promover nuevos espacios de aprendizaje (Johnson & Story, 1879).

## Referentes teóricos

Algunas de las grandes dificultades para los docentes y en especial los de matemáticas, es combatir la falta de motivación de los estudiantes al construir conocimientos a partir de los conceptos abstractos, y de profundizar en teorías importantes expuestas en los libros de texto. Para cambiar estos escenarios donde las fuentes de conocimientos no son muy llamativas a los alumnos, se han encontrado nuevas maneras que se convierten en estrategias eficaces de enfrentar el problema, como el Aprendizaje Basado en Juegos (GBL) (Felipe & Ortiz Sotomayor, 2018).

En la actualidad, el profesorado necesita de juegos y actividades lúdicas que favorezcan el aprendizaje de las matemáticas para cumplir con los requerimientos de la época, que promueve hacer de la enseñanza un proceso divertido y de aprendizaje significativo para los estudiantes. Como afirma Jiménez (2018):

Los docentes debemos adaptarnos a los nuevos tiempos y a las nuevas generaciones, que aprenden y disfrutan trabajando sobre situaciones problemáticas que le surgen en la vida diaria y una forma de hacerlo es utilizando el juego como un recurso para aprender. (p.171)

Según Latorre (2003) citado por del Moral Pérez et al. (2016), “El juego es el escenario idóneo para que los escolares adquieran numerosos aprendizajes, algunos ayudan a la estructuración del lenguaje, otros favorecen el desarrollo del pensamiento posibilitando aprendizajes significativos” (p.179). Por su parte, García & Mogollón (2020) afirman que

La gamificación es una estrategia basada en los fundamentos del juego para generar ambientes, condiciones para propiciar el aprendizaje significativo, sobre la base de la compensación a corto y largo plazo, donde la estructuración permita que las metas a alcanzar sean uno de los factores motivacionales para que los estudiantes se acerquen al conocimiento, generando en ellos hábitos de autorregulación, pero a su vez el reforzamiento de la concentración, memoria y atención. (p. 130)

No obstante, ya existe un traslado de los escenarios lúdicos a las pantallas de videojuegos, que de una manera u otra aprovecha de su auge motivador para impulsar cualquier proceso formativo. Para Pérez et al. (2018) una posible dificultad para implementar juegos en las aulas no solo viene dada por el factor tecnológico, sino por lo que requiere hacer de un juego una herramienta útil para el aprendizaje, siendo a su vez perceptible, operable y comprensible.

Sin embargo, existen juegos que no requieren de una gran capacidad de cómputo y pueden ser útiles para fines didácticos. Por ejemplo, algunos juegos diseñados con el fin de favorecer el aprendizaje matemático y la motivación de los estudiantes en clase, son: el Cubo de *Rubik*, el Cubo *Skewb*, el *TopSpin*, el Anillo de *Rubik* e incluso el Juego del 15 (Felipe & Ortiz, 2018).

Muchos juegos como el Juego del 15 se pueden utilizar para profundizar en la enseñanza de temas de álgebra desde una perspectiva diferente, sin dejar a un lado la abstracción que ameritan. Para Howe (2017) las configuraciones de este juego son equivalentes al conjunto de las permutaciones de 15 elementos. Es decir, el conjunto de permutaciones del Juego del 15 es equivalente al grupo simétrico  $S_{15}$ . En consecuencia, a pesar del juego convertirse en un problema que envuelve la teoría de grupos en matemáticas y que constituye un desafío computacional en la construcción de algoritmos de solución eficientes, funciona como una herramienta que profundiza en la adquisición de conocimientos del álgebra abstracta.

Los rompecabezas se consideran juegos útiles y fáciles de integrar en los procesos de enseñanza-aprendizaje para contribuir al desarrollo del pensamiento lógico, aunque esa sea la realidad de algunos juegos de mesa, a estos no se le da la importancia o no se aplican con la frecuencia requerida para provocar aprendizajes significativos (Villavicencio, 2018).

Los juegos de rompecabezas han demostrado estar vinculados a un sinnúmero de temas esenciales para las matemáticas y deberían ser aprovechados por los profesores como herramientas de apoyo en el aula.

Al analizar los rompecabezas, se encuentra que aparte de ser divertidos poseen una rigurosidad matemática digna de ser analizada, más aún en juegos como el de nuestro estudio que al observar todos los movimientos como un conjunto de permutaciones se obtienen propiedades interesantes. Felipe & Ortiz Sotomayor (2018) afirman que:

Se podría pensar que los rompecabezas pueden servir únicamente de entretenimiento y diversión. Sin embargo, dichos entretenimientos pueden entenderse como juegos realmente educativos, no solo porque desarrollan nuestro intelecto, nuestra visión espacial, capacidad lógica y de razonamiento, sino porque constituyen además una eficaz herramienta en el entendimiento de algunas estructuras algebraicas que, debido a su alto grado de abstracción matemática, son de difícil comprensión. El estudio de los movimientos “legales” en ciertos rompecabezas y las simetrías asociadas a estos movimientos permiten estimular el aprendizaje de las nociones más básicas de la teoría de grupos mediante permutaciones. (p.10)

No obstante, al momento de implementar el uso de un juego en clase, se debe entender que el uso exclusivo de las componentes académicas podría disminuir la motivación de los estudiantes, esto se debe a costumbres equivocadas de trabajo en el aula o como menciona Dehesa (2018), “la enseñanza tradicional ha privilegiado la memorización y no la aplicación de reglas matemáticas a contextos nuevos y externos al aula” (p.46) y de acuerdo a las situaciones del entorno en el mundo, es en esos contextos nuevos donde se debe mantener el enfoque.

En consecuencia, establecer la eficacia de los juegos y el aprendizaje se convierte en una tarea algo complicada. Debe mantenerse dentro de un contexto de comprensión de cómo se aprende. Entonces, cómo la ciencia de los juegos encaja en el marco disciplinario de una consideración crítica, cuando es visto desde esta perspectiva educativa, las diferentes estrategias que el docente pueda seleccionar deben escogerse con mucha cautela (de Freitas, 2018).

Por hoy, lo que constituye un aliciente para la implementación de juegos digitales en la academia y como se menciona en una revisión sistemática de literatura, el uso del aprendizaje basado en juegos en la educación superior se ha convertido en tendencia de estudio durante la última década, y particularmente en la enseñanza de las matemáticas, donde los juegos digitales son los protagonistas en la lucha contra el factor motivación en el proceso de enseñanza (Zabala-Vargas et al., 2020).

A continuación, se da a conocer algunos aspectos generales y de importancia respecto a los orígenes del Juego del 15, cómo se juega, su objetivo y un caso especial imposible de resolver. Nieto (2005) cuenta que:

En 1878 Sam Loyd (1841–1911), uno de los más grandes creadores de acertijos que han existido, propuso un rompecabezas que causó verdadero furor en su época y ha mantenido su popularidad hasta nuestros días. La versión original consistía en una caja cuadrada que contenía quince piezas cuadradas, numeradas del 1 al 15. (p.1)

Conocido en algunos países por el nombre de “*Taken*”, es un juego de deslizamiento de piezas que consiste en un cuadrado en forma de matriz  $4 \times 4$ , de 16 casillas que contiene los quince primeros números naturales y la casilla que ocupa la posición 16, está vacía. Como se muestra en la figura 1:

**Figura 1:** Juego del 15 en su configuración original

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  |
| 5  | 6  | 7  | 8  |
| 9  | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 |    |

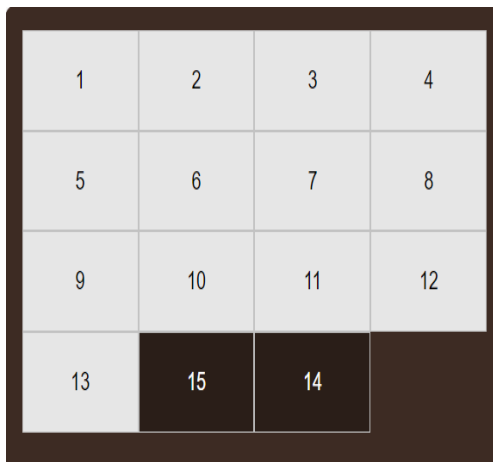
**Fuente:** elaboración propia, a partir de <https://juegodel15.netlify.app/>

Este se juega de la siguiente manera:

- Cada cuadrado numerado es un bloque deslizante.
- Esta numeración debe iniciar desde una configuración aleatoria, diferente en cada ocasión.
- Cada movimiento consiste en deslizar un cuadrado numerado sobre el cuadro vacío.
- La finalidad es lograr que las piezas queden colocadas en orden. Es decir, ordenadas de menor a mayor, empezando desde arriba y de izquierda a derecha, dejando el cuadrado vacío en el extremo inferior derecho.

Para lograr ese objetivo, se debe realizar una serie de movimientos legales con una alta probabilidad de que estos movimientos sean diferentes cada vez que se juega, debido a la gran cantidad de configuraciones diferentes que se pueden obtener al iniciar el juego. La cuestión es que las personas fueron perdiendo motivación de jugar debido a que se daban cuenta que muchas veces el juego era fácil de solucionar, mientras que el mismo número de veces era difícil llegar a la posición original. Cuando este caso ocurría, la configuración más aproximada a la que se llega, difiere de la original de la solución, solo porque se intercambian las casillas 14 y 15 como se muestra en la figura 2:

**Figura 2:** Juego del 15 con casillas 14 y 15 intercambiadas



|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  |
| 5  | 6  | 7  | 8  |
| 9  | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 15 | 14 |    |

**Fuente:** elaboración propia, a partir de <https://juegodel15.netlify.app/>

Loyd, escribió acerca de cómo volvió loco al mundo entero ofreciendo el valor de \$1,000.00 USD por la solución correcta al problema de resolver el juego llevándolo de la posición en la figura 2 al estado original que se observa en la figura 1. Motivo por el cual miles de personas revivieron la emoción de jugar el rompecabezas (Archer, 1999).

Sin embargo, a pesar de que encontraron muchas pseudo-soluciones (soluciones diferentes a la original, cambiando las reglas), nadie pudo dar con la solución original. Lo que se convirtió en un aliciente para perder la emoción por el juego, entonces ¿Puede el Taken ser resuelto, iniciando desde la posición de la figura 2? Enseguida se observa cómo las matemáticas ofrecen una explicación a este hecho.

### Relaciones con el grupo $S_{15}$

En matemáticas y particularmente en álgebra abstracta, una permutación  $\sigma$  es un elemento del grupo simétrico  $S_n$ , de orden finito  $n$ . Es decir,  $\sigma$  es una función biyectiva sobre un conjunto de  $n$  elementos. Por ejemplo, se puede definir una permutación  $\alpha$  sobre el conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, 8\}$  como se muestra en (1):

$$\alpha \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 8 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Otra manera de representar la permutación  $\alpha$  es mediante una descomposición por ciclos, como se ilustra en (2):

$$\alpha = (1\ 3\ 7\ 5)(4\ 8\ 6) \quad (2)$$

Además,  $\alpha$  puede ser escrita como un producto de transposiciones, tal como se muestra en (3). Es decir, como producto de ciclos de longitud 2.

$$\alpha = (1\ 3)(1\ 7)(1\ 5)(4\ 8)(4\ 6) \quad (3)$$

Luego, una permutación que puede ser expresada como un producto de un número par de transposiciones se llama permutación par, de lo contrario se llama permutación impar. En el caso del ejemplo anterior, por la igualdad (3) como  $\alpha$  se representa por cinco transposiciones, entonces es una permutación impar.

Por lo tanto, al subgrupo de las permutaciones pares se le conoce por  $A_n$ , mientras que el de las permutaciones impares se denota por  $O_n$  y se tiene que

$$A_n \cap O_n = \emptyset \quad (4)$$

Un resultado de la teoría, garantiza que toda permutación se puede descomponer como un producto de transposiciones. Sin embargo, de (4) se puede concluir que una permutación no puede ser par e impar a la vez. Es decir, es imposible convertir una permutación par en una impar y viceversa, salvo transformaciones.

Consecuentemente, cada una de las configuraciones del Juego del 15 puede representarse como una permutación del grupo simétrico  $S_{15}$ , como descomposición por ciclos y también como un producto de transposiciones. Ahora se debe observar que efecto tiene la propiedad de paridad de una permutación que se obtiene, una vez se inicia el juego.

## Materiales y Métodos

### Contexto de la investigación

Para construir el Juego del 15 en la plataforma virtual, se tomaron en cuenta las reglas de movimientos establecidas en el juego, entonces se procedió a programarlas en JavaScript utilizando el *DOM* (Document Object Model) para ingresar a las propiedades de los botones (Fichas) por su *ID* y cambiar mediante *CSS* su estado y color dependiendo de las interacciones del usuario. Además, se usó la función *Math.Random* para obtener valores aleatorios del 1 al 15 sin repetir y guardarlos en un arreglo, desde donde son transferidos los valores correspondientes a cada una de las fichas para generar aleatoriedad entre una partida y otra.

Una vez el juego está funcionando en el sitio web, se decidió establecer un temporizador, un contador de movimientos y una base de datos indexada para guardar los puntajes de los

participantes motivándolos a seguir jugando y a establecer algoritmos de solución más efectivos, entonces para esto se utilizó las funciones de *set Interval*, una función que realiza la suma de movimientos al mover una pieza para el contador y una herramienta que proporcionan los navegadores web llamada *IndexDB* para guardar datos en la memoria interna del usuario y actualizarlos dependiendo de su rendimiento en el juego.

Por otro lado, fue conveniente proponer una evaluación formativa para evidenciar la adquisición de competencias específicas y a fin de que sea adecuada, se establecen indicadores de desempeño, se diseñó una hetero-evaluación aplicada después de jugar y se elaboró una rúbrica como propuesta, enfocada en cuantificar las destrezas y actitudes que presentan los estudiantes al finalizar el juego y comparar los conceptos teóricos con los algoritmos de resolución del juego, y de esta manera verificar si un mayor rendimiento (menor tiempo y movimientos) al jugar se corresponde con una mejora en cuanto a la interpretación de las propiedades del Juego del 15 haciendo uso de las teorías sobre las permutaciones (Cerrano et al., 2019).

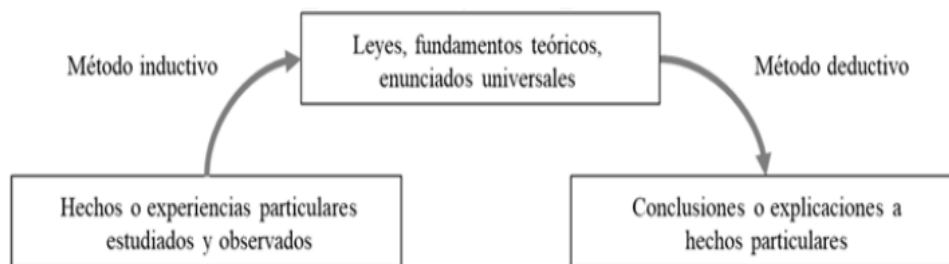
### Modelo de la Investigación

En esta investigación se tomó como modelo el método inductivo-deductivo. Rodríguez & Pérez (2017), afirman que:

El método inductivo-deductivo está conformado por dos procedimientos inversos: inducción y deducción. La inducción es una forma de razonamiento en la que se pasa del conocimiento de casos particulares a un conocimiento más general, que refleja lo que hay de común en los fenómenos individuales. (p.183)

El método inductivo funciona como el contraste del método deductivo, en el primero se toma como referencia los datos y hechos que surgen como el resultado de prácticas particulares, y de esta manera consigue organizar sus argumentos, mientras que el segundo método basa sus argumentos a partir de lo teórico o general para llegar a configurar prácticas particulares. Debido al propósito de la investigación que articula la búsqueda de información en las regularidades esenciales de la academia, se elige inductivo-deductivo por su clasificación como método para construcción del conocimiento (ver figura 3):

**Figura 3:** Imagen sobre el Métodos de investigación Inductivo-deductivo.



**Fuente:** Prieto(2017).Métodos de investigación deductivo e inductivo. [Figura]. Recuperado de [https://revistas.javeriana.edu.co/files-articulos/CC/18-46%20\(2017\)/151556547004/](https://revistas.javeriana.edu.co/files-articulos/CC/18-46%20(2017)/151556547004/)



Para analizar la viabilidad de implementar juegos clásicos en plataformas virtuales se inicia una consulta bibliográfica en el motor de búsqueda “*Google Académico*”. Aquí se consultaron artículos mediante las palabras claves: juegos, enseñanza, matemáticas, estrategias, aprendizaje, motivación. En los resultados de la consulta, se modificaron opciones para acceder a los artículos que fueron publicados desde el 2010 hasta el 2020, sin dejar a un lado aquellos que, por motivos obvios de creación del juego, fueron publicados hace algunas décadas. En bases de datos como *SciELO*, *Redalyc* y *Dialnet* se encontraron artículos relacionados con el Aprendizaje Basado en Juegos (GBL) y otros que analizan juegos clásicos como un conjunto de permutaciones para determinar propiedades matemáticas. De esta manera, se conocen los hechos y/o experiencias particulares que anteriormente se han estudiado y observado, dando lugar al modelo inductivo.

Posteriormente, ya conocidas las leyes, fundamentos teóricos y propiedades importantes del grupo simétrico como tema del álgebra abstracta, se propone el uso un juego clásico y conocido, en el que se profundiza y se construye conocimiento respecto a las permutaciones.

Se realiza la implementación del Juego del 15 por medio de una plataforma virtual, para que los estudiantes entiendan de mejor manera los conceptos de permutación tras identificar las propiedades matemáticas del juego. Además, con el objetivo de motivar el desempeño de los estudiantes, el juego cuenta con conteo de tiempo y número de movimientos, lo que permite mejorar los algoritmos de solución implementados y así plasmar una idea similar a la gamificación. Las mejores marcas individuales quedan grabadas y se actualizan una vez se obtienen resultados más óptimos con menor número de movimientos y menor tiempo.

Para hacer uso del juego en la enseñanza de permutaciones a estudiantes de nivel superior es necesario que el docente tenga en cuenta los aspectos a evaluar, ya que con el uso del juego se puede llegar a distintos niveles de conocimientos que pueden ir desde dar la definición de los conceptos de permutación hasta utilizar algoritmos para determinar el número de permutaciones necesarias, para resolver el juego dependiendo de la posición de las fichas. Pero a diferencia de la complejidad con la que se lleve a cabo la actividad se debe de tener en cuenta mediante los instrumentos de evaluación: El entendimiento de los conceptos matemáticos fundamentales en relación a permutaciones, la eficiencia de los algoritmos que utiliza para dar solución al juego, la capacidad para formular hipótesis de manera clara sobre las permutaciones e identificar las propiedades de las permutaciones inmersas en el juego. Para ello se propone un cuestionario valorado por expertos y se asocia a una posible rúbrica de evaluación con la finalidad de emitir un juicio sobre la solidez de los conocimientos después de realizar la actividad.

## Resultados y Discusión

Una vez se comprende la relación de asociar cada configuración del Juego del 15 con una permutación sobre un conjunto de 15 elementos ( $S_{15}$ ), en el orden natural y sin tener en cuenta la casilla vacía, se explica los verdaderos motivos por los que resulta fácil ofrecer una recompensa lo suficiente atractiva para que muchas personas jueguen de forma enloquecida.

Debido a la proposición (4), los subgrupos  $A_{15}$  y  $O_{15}$  tienen exactamente el mismo número de elementos, lo que quiere decir es que existen  $16! = 20.922.789.888.000$  posibles permutaciones en el juego, de las cuales exactamente la mitad son pares y la otra mitad impares.

En efecto, a la configuración del juego que se presenta en la figura 2, se le asocia la permutación que se visualiza en (5):

$$\sigma_1 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 15\ 14) = (15\ 14) \quad (5)$$

Mientras que la permutación asociada a la figura 1, sería la equivalente a una permutación identidad sobre el conjunto  $S_{15}$  de (6), es decir:

$$\sigma_2 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15) \quad (6)$$

En consecuencia,  $\sigma_1$  como se muestra en (5) es impar y la permutación  $\sigma_2$  que obedece al objetivo de solubilidad del juego presentada en (6), es par. Por lo que tiene sentido, que Loyd haya ofrecido una recompensa de esa magnitud por una solución que es imposible de obtener.

Como se puede observar, el hecho de tener discernimiento en cierto contenido abstracto, puede beneficiar aquellas personas que se retan a solucionar el Juego del 15, pero mejor aún, la simple acción de jugarlo y sentir motivación por solucionarlo, conduce a la construcción de conocimientos algebraicos que te permitan dar con el objetivo. Lo que establece una relación de correspondencia entre ambos; entonces, para una población académica que haya realizado estudios sobre permutaciones, bastaría con tener un criterio que les deje saber cuándo una configuración inicial del juego se puede llevar a la configuración identidad en (6), en otras palabras, cuando es soluble.

Mulholland (2021) enuncia que una permutación  $\alpha$  del Juego del 15 que fija la casilla 16, es soluble si y solo si esta es par. Es decir,  $\alpha \in A_{15}$  y de manera general, se tiene el siguiente *Criterio de solubilidad para el juego del 15*: Una permutación del Juego del 15 es soluble si y solo si la paridad de la permutación es la misma que la paridad de la posición del espacio vacío.

En conclusión, un estudiante que inicia el juego, debe representar la permutación inicial que aparece de manera aleatoria, determinar la paridad de tal permutación y una vez encontrada comenzar una secuencia de pasos legales que lo conduzcan a la permutación identidad del juego o en su defecto a la permutación graficada en la figura 2.

### **Juego como recurso didáctico y su evaluación**

En la mayoría de los casos, cuando se escuchan las palabras juego y matemática en una oración, probablemente se refieren a rompecabezas y acertijos. Sin embargo, en los juegos modernos de estrategia como los de la figura 4, equipos profesionales de *eSports* que compiten entre sí, contratan a personas que se especializan en el análisis estadístico de los modos que estos ofrecen, para hacer que los jugadores cuenten con una ventaja ante sus oponentes.

Cuando se conoce que un área del conocimiento, aplica de una manera u otra al proceso estratégico de un juego, se establece un nuevo enfoque académico que permite desarrollar entornos virtuales que favorecen la enseñanza, esto incrementa la posibilidad al docente de poder diseñar herramientas de acuerdo a las necesidades educativas de sus estudiantes, logrando que de

esta manera el conocimiento sea accesible para todos en cualquier lugar y que esté adaptado a las necesidades pedagógicas de sus estudiantes.

**Figura4:** Juegos que utilizan la estadística como estrategia



**Fuente:** elaboración propia

Otro aspecto importante a tener en cuenta, es el cómo evaluar a los estudiantes y no solo el producto utilizado, sino también el proceso para adquirir conocimientos. Según González (2014) “es importante destacar que la evaluación de las competencias no puede efectuarse desde el paradigma de la evaluación tradicional, dado que el enfoque por competencias exige un tipo de evaluación diferente” (p. 3).

En ese orden de ideas, se plantea un posible cuestionario que debe ir completándose a medida que se juega, para evaluar la ejecución de movimientos, la interpretación de la relación de las permutaciones con el juego y la identificación de las propiedades (ver tabla 1).

**Tabla 1:** Evaluación de la actividad “Juego del 15”

| Preguntas de evaluación formativa   | Resultados de aprendizaje  |
|---|--|
| Al iniciar el juego: ¿Cuál es la permutación de la configuración inicial?                       | Identificar y representar una permutación.   |
| ¿La permutación inicial es par o impar? (Justifique)  | Emplear los conceptos de transposición y paridad de una permutación.                     |
| ¿Cuál de las permutaciones finales del juego obtuvo?  | Identificar y representar una permutación.   |
| ¿Era posible saber que obtendría esa permutación final, desde el inicio del juego? (Justifique) | Comprender las propiedades importantes de las permutaciones.                             |
| ¿Cuánto tiempo y número de movimientos le tomó llegar a la solución?                            | Proponer una solución eficiente al proceso del juego.                                    |
| Después de jugarlo algunas veces (<10). ¿Cuál es su algoritmo óptimo de solución?               | Construir un algoritmo algebraico que permita encontrar soluciones eficientes del juego. |

**Fuente:** elaboración propia

Para Espinosa (2013), “la utilización de la rúbrica para la evaluación por competencias ayuda a mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje de nuestros alumnos” (p.252), en esta investigación se propone el uso de una rúbrica (máximo 25 puntos) adaptada para la evaluación formativa que se aplica mientras los estudiantes realizan la actividad del juego (ver tabla 2).

**Tabla 2:** Rubrica para la evaluación de la actividad “Juego del 15”

| <b>D: [1.1,2]</b>  | <b>C: [2.1,3]</b>  | <b>B: [3.1,4]</b>  | <b>A: [4.1,5]</b>  | <b>Total</b> |
|--|--|--|--|--------------|
| Identifica y representa mal una permutación  | Identifica y representa poco una permutación   | Identifica y representa bien una permutación   | Identifica y representa muy bien una permutación   |              |
| No emplea los conceptos de transposición y paridad de una permutación                      | Emplea poco los conceptos de transposición y paridad de una permutación                          | Emplea bien los conceptos de transposición y paridad de una permutación                      | Emplea muy bien los conceptos de transposición y paridad de una permutación                      |              |
| No comprende las propiedades importantes de las permutaciones                              | Comprende poco las propiedades importantes de las permutaciones                                  | Comprende bien las propiedades importantes de las permutaciones                              | Comprende muy bien las propiedades importantes de las permutaciones                              |              |
| No propone una solución eficiente al proceso del juego                                     | Propone una solución poco eficiente al proceso del juego   | Propone una buena solución eficiente al proceso del juego                                    | Propone una muy buena solución eficiente al proceso del juego                                    |              |
| No construye un algoritmo algebraico que permita encontrar soluciones eficientes del juego | Construye un algoritmo algebraico promedio que permite encontrar soluciones eficientes del juego | Construye un buen algoritmo algebraico que permite encontrar soluciones eficientes del juego | Construye un muy buen algoritmo algebraico que permite encontrar soluciones eficientes del juego |              |
| <b>Total</b>   |  |  |  |              |

**Fuente:** elaboración propia

En la elaboración de esta rúbrica se tomó en cuenta los criterios necesarios para evaluar las competencias matemáticas de los alumnos, acorde a la característica de la actividad seleccionada, cada uno de los criterios son medidos mediante escalas y categorías, siendo la categoría más alta A de (4.1 a 5) y la más baja D de (1.1 a 2) y teniendo en cuenta que los valores por debajo de 1.1 corresponden a quien no realiza la actividad del juego, de acuerdo como el docente desee juzgar.

Algunos de estos elementos son descritos por Alsina (2018), donde establece como imprescindible para la evaluación: la comprensión del problema matemático, hacer conjeturas o suposiciones, expresar ideas matemáticas y aplicar estrategias de resolución de problemas.

Estos elementos son tomados en cuenta en la rúbrica y puntuados según los estudiantes muestren entendimiento de los conceptos teóricos generales del grupo simétrico, identifiquen las propiedades importantes de las permutaciones inmersas en el juego y establezcan un algoritmo eficiente (mejorar su record, menor tiempo y número de movimientos) para solucionar el mismo.

## Conclusiones

En esta investigación se pudo evidenciar que actualmente, muchos autores investigan sobre juegos puzles y sus relaciones con teorías matemáticas, el juego utilizado ejemplifica una de las aplicaciones del tema permutaciones y también el uso del aprendizaje basado en juegos como estrategia es una tendencia que poco a poco se fortalece para convertirse en herramienta fundamental en las aulas de clases y especialmente en la virtualidad.

El desarrollo e implementación del Juego del 15 como una estrategia de aprendizaje basada en juego, puede ser utilizada para que los estudiantes se motiven a profundizar en la investigación de temas algebraicos, sientan curiosidad por conocer cuáles son las propiedades del juego ligadas a las permutaciones y sobre todo realicen construcción de algoritmos propios que ayuden a obtener una mayor ventaja en el juego.

Aunque no se ha realizado un trabajo experimental como evidencia, debido a la naturaleza del modelo de investigación, es posible inferir que la estrategia de aprendizaje basado en juegos utilizada de una manera adecuada por los docentes, ayuda a fortalecer las competencias específicas en el área de matemáticas. Adicionalmente, si se contempla el hecho de que esta se implemente de forma virtual, resulta beneficioso para desarrollar procesos que se están llevando a cabo como consecuencia de la pandemia, donde la mayoría de las clases son recibidas por medio de dispositivos electrónicos con acceso a internet.

Las técnicas utilizadas para el desarrollo del juego permitieron que este sea adaptado a la web y que por lo tanto los estudiantes tengan menos limitaciones de acceder al mismo, ya que se encuentra disponible para computadoras y celulares. También al ser alojada con un servicio de almacenamiento en la nube llamado Netlify, se consiguió que pueda estar disponible para todos los usuarios a cualquier hora sin necesidad de descargar una aplicación.

La importancia del párrafo anterior impacta en el hecho de que hoy en día la educación a distancia y virtual que han tenido gran crecimiento en las últimas décadas, se sustentan mayormente por la tecnología, y son las plataformas en las cuales los docentes vinculan técnicas, estrategias, instrumentos y materiales, las que dan pautas a un modelo de aprendizaje contemporáneo.

La versión original del juego e incluso cualquiera de las diferentes versiones que se encuentran de manera digital en la web, construida por grupos de investigación con intereses en el juego, no tienen la opción de las herramientas encargadas del conteo de tiempo y números de movimientos que se colocó como un extra a la versión realizada para efectos de esta investigación. En ese sentido, se espera que la recepción de estas funciones, provoque en los estudiantes un sentimiento de reto o de competencia consigo, para optimizar el objetivo de obtener un menor tiempo y menor número de movimientos posibles.

Por otro lado, la valoración de las preguntas escogidas para la evaluación formativa fue positiva, en ella se constituyen lineamientos o criterios que aportan al fortalecimiento de algunos resultados de aprendizajes contemplados en la asignatura de álgebra moderna a nivel superior.

La rúbrica propuesta corresponde a una heteroevaluación y tiene la finalidad de cuantificar el conocimiento obtenido por los estudiantes sobre los conceptos teóricos y propiedades de las permutaciones, su habilidad para establecer algoritmos propios que le ayuden a resolver el juego y que puedan comunicar sus ideas haciendo uso correcto del lenguaje algebraico.

La estrategia propuesta del uso del Juego del 15 en esta investigación funciona como motivación para profundizar en la enseñanza de las permutaciones e invita de igual forma a los docentes de poder hacer uso del aprendizaje basado en juego de manera virtual, por lo que brinda la oportunidad de enfrentarse a una realidad que necesita de innovación y herramientas funcionales en una era digital, donde los docentes no tienen el control de un aula para decir apaguen los celulares y no se distraigan. En esta época se necesita que los estudiantes se mantengan motivados sin dar mal uso a las herramientas que proporciona la tecnología, que puedan cumplir con sus deberes con la mejor calidad posible, lo que constituye un reto para las aplicaciones de índole educativo y que se puede solucionar con el uso de aplicaciones o estrategias didácticas que generen aprendizajes significativos.

## Referencias

- Alsina, À. (2018). La evaluación de la competencia matemática: ideas clave y recursos para el aula. *Epsilon-Revista de Educación Matemática*, (98), 7–23. <https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es/epsilon/files/epsilon98.pdf>
- Archer, A. F. (1999). A Modern Treatment of the 15 Puzzle. *The American Mathematical Monthly*, 106(9), 793-799. <https://doi.org/10.2307/2589612>
- Cerrano, M., Gallegos, M. L., Cinalli, M., & Feraboli, L. (2019). Guía de apoyo para la redacción, puesta en práctica y evaluación de juegos serios. En M.A. Risetto, R.M. Lurbé & I. Barón (Comps.). *XII Congreso de Ingeniería Industrial: Educación en la Ingeniería Industrial*. (pp. 134-145). <https://ria.utn.edu.ar/bitstream/handle/20.500.12272/4478/F%20-%20La%20Educaci%C3%B3n%20en%20la%20Ingenier%C3%ADa%20Industrial.pdf?sequence=7&isAllowed=y>
- de Freitas, S. (2018). Are Games Effective Learning Tools? A Review of Educational Games. *Journal of Educational Technology & Society*, 21(2), 74–84. [https://www.jstor.org/stable/26388380?seq=1#metadata\\_info\\_tab\\_contents](https://www.jstor.org/stable/26388380?seq=1#metadata_info_tab_contents)
- De-Vincenzi, A., Marcano, D., & Macri, A. (2020). La práctica educativa bajo el lente de la teoría de la actividad. *IPSA Scientia, Revista científica Multidisciplinaria*, 5(1), 159-176. <https://doi.org/10.25214/27114406.1033>
- Dehesa, N. (2018). Las Matemáticas puestas en Juego. *Epsilon-Revista de Educación Matemática*, (99), 43–53. [https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es/epsilon/files/epsilon99\\_3.pdf](https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es/epsilon/files/epsilon99_3.pdf)
- del Moral Pérez, M. E., Fenández, L. C., & Guzmán-Duque, A. P. (2016). Proyecto Game to Learn: Aprendizaje basado en juegos para potenciar las inteligencias lógico matemática, naturalista y lingüística en educación primaria. *Píxel-Bit, Revista de Medios y Educación*, 49, 173–193. <https://doi.org/10.12795/pixelbit.2016.i49.12>
- Espinosa, M. T. (2013). Evaluación de competencias mediante rúbrica. Importancia de las matemáticas en la evaluación de competencias genéricas. *Historia y Comunicación Social*, 18(Esp. Nov.), 243–255. [https://doi.org/10.5209/rev\\_HICS.2013.v18.44240](https://doi.org/10.5209/rev_HICS.2013.v18.44240)

- Felipe, M. J., & Ortíz Sotomayor, V. M. (2018). Análisis de estructuras algebraicas mediante la modelización de puzzles y rompecabezas. *Libro de Actas IN-RED 2018: IV Congreso Nacional de Innovación Educativa y Docencia En Red*, (1–10). <https://doi.org/10.4995/INRED2018.2018.8593>
- Felipe, M. J., & Ortiz, V. M. (2018). Jugando con la Teoría de Grupos: rompecabezas, puzzles y otros entretenimientos matemáticos. *Modelling in Science Education and Learning*, 11(2), 59-81. <https://doi.org/10.4995/mse1.2018.9720>
- García-Mogollón, M., & Mogollón-Rodríguez, M. (2020). Gamificación con procesos cognitivos para mejorar niveles de comprensión lectora en estudiantes de octavo grado. *IPSA Scientia, Revista científica Multidisciplinaria*, 5(1), 127-142. <https://doi.org/10.25214/27114406.997>
- González, C. S. (2014). Estrategias para trabajar la creatividad en la Educación Superior: pensamiento de diseño, aprendizaje basado en juegos y en proyectos. *RED-Revista de Educacion a Distancia*, XIII(40), 7–22. <https://www.um.es/ead/red/40/gonzalez.pdf>
- Howe, T. (2017). Two Approaches to Analyzing the Permutations of the 15 Puzzle. *Semantic Scholar*, 1–14. <https://www.semanticscholar.org/paper/Two-Approaches-to-Analyzing-the-Permutations-of-the-Howe/321deb4725f45ebc248c45f3eaa69138195e1f#citing-papers>
- Jiménez, Y. (2018). Estrategias lúdicas para la enseñanza-aprendizaje de la matemática a nivel superior. En C. López-García & J. Manso (Eds.), *Transforming education for a changing world*. (pp. 170-179). Eindhoven, NL: Adaya Press. <http://www.adayapress.com/wp-content/uploads/2017/07/CTED17.pdf>
- Johnson, W. W., & Story, W. E. (1879). Notes on the “15” Puzzle. *American Journal of Mathematics*, 2(4), 397–404. [https://www.jstor.org/stable/2369492?seq=1#metadata\\_info\\_tab\\_contents](https://www.jstor.org/stable/2369492?seq=1#metadata_info_tab_contents)
- Mulholland, J. (2021). Permutation Puzzles A Mathematical Perspective. <http://www.sfu.ca/~jtmulhol/math302/notes/permutation-puzzles-book.pdf>
- Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P., & Rodríguez-Muñiz, L. J. (2014). El uso de los juegos como recurso didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas: estudio de una experiencia innovadora. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 10(39), 19–33. <https://union.fespm.es/index.php/UNION/issue/view/46/45>
- Nieto, J. H. (2005). Permutaciones y el Juego del 15. *Boletín de La Asociación Matemática Venezolana*, XII(2), 259–264. <https://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol12/jnieto.pdf>
- Pérez, D., Vidal, M. I., & Chanchí, G. E. (2018). Identificación de problemas de accesibilidad en juegos serios. *Revista Colombiana de Computación*, 19(2), 24–36. <https://doi.org/10.29375/25392115.3440>
- Prieto, B. J. (2017). El uso de los métodos deductivo e inductivo para aumentar la eficiencia del procesamiento de adquisición de evidencias digitales. *Cuadernos de Contabilidad*, 18(46), 1–27. <https://doi.org/https://doi.org/10.11144/Javeriana.cc18-46.umd>
- Rodríguez, A., & Pérez, A. O. (2017). Métodos científicos de indagación y de construcción del conocimiento. *Revista Escuela de Administración de Negocios*, (82), 175–195. <https://doi.org/https://doi.org/10.21158/01208160.n82.2017.1647>
- Villavicencio, G. (2018). *Los juegos de rompecabezas y su influencia en el desarrollo del razonamiento lógico de los estudiantes del nivel primario, de la institución educativa N° 16104 de San Francisco, Colasay, Jaén*. [Tesis de Maestría, Universidad César Vallejo]. [https://repositorio.ucv.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12692/33363/villavicencio\\_bg.pdf?sequence=1&isAllowed=y](https://repositorio.ucv.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12692/33363/villavicencio_bg.pdf?sequence=1&isAllowed=y)

Viñals Blanco, A., & Cuenca Amigo, J. (2016). El rol del docente en la era digital. *Revista Interuniversitaria de Formación Del Profesorado*, 30(2), 103–114. <https://recyt.fecyt.es/index.php/RIFOP/issue/view/2859/218>

Zabala-Vargas, S. A., Ardila-Segovia, D. A., García-Mora, L. H., & Benito-Crosetti, B. L. de. (2020). Aprendizaje Basado en Juegos (GBL) aplicado a la enseñanza de la matemática en educación superior. Una revisión sistemática de literatura. *Formación Universitaria*, 13(1), 13–26. <https://doi.org/10.4067/S0718-50062020000100013>